

频率响应

Week11-12 讲的是频率响应，是 MTH101，EEE103 和 EEE109 的首次联动。加上讲这一章那两星期可忙，结果学这章时我可懵逼……

笔者也在复习(;´д`), 有问题欢迎指出，教学相长嘛。

期末时间紧，就不细排版了……

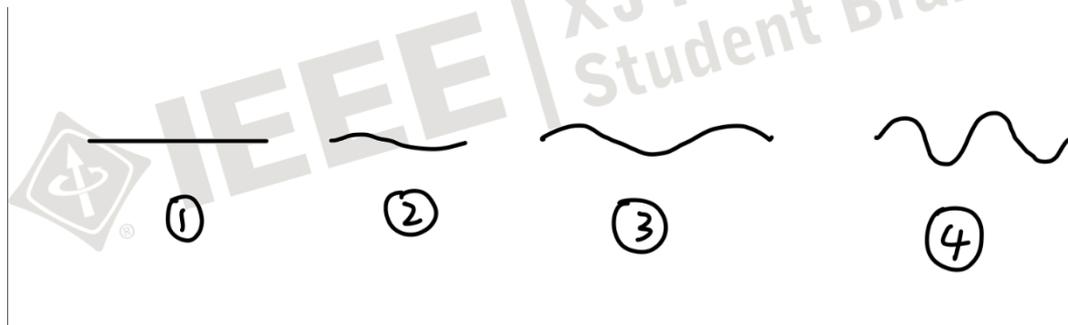
要明白“频率响应”，首先要厘清电容在电路中的作用。

从交流直流到高频低频

“电容，两块对放的金属板，可储存电荷，通交流，阻直流。”

这是对电容的简要理解。

这话没问题，问题是，交流和直流的界限并没有那么明晰。



以上四种波形，若要分成两组，你会怎么分？

可见，把电信号粗暴地分成“直流”与“交流”是不太方便的。对于各种各样的(正弦)信号来说，“低频”和“高频”才有意义。所谓“直流”，不过是频率为 0 的低频信号罢了(´д`)!

那么，电容的“通交流，阻直流”就应该改为“通高频，阻低频”了，是一个渐变的过程。

从 109 到 103

之前 109 一直克制着有关电容的东西，然后上来就是，频率响应。他说他是乱讲的，他可不是乱讲的啊！阻抗，幅角，复频率，训练有素。看来是，有 bear 来！

这一章需要直接运用大量 EEE103 的知识点作为应用，看来课程安排是下了一盘大棋。

复频率：用复数形式表示正弦类信号，轻松表示相位和振幅。

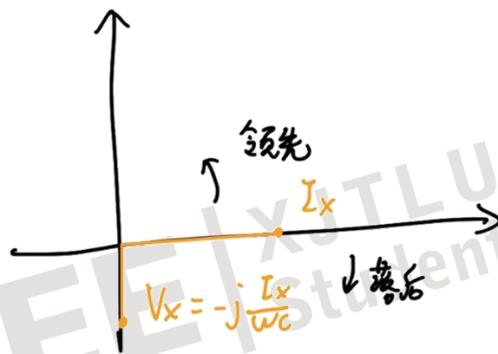
阻抗：若要把电容电感电阻放在一个共同的表达体系内，就要使用“复电阻”，也就是阻抗。其中电容的阻抗是：

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$$

其中， $-j$ 意味着通过通过电容的电流幅值领先于电压幅值 90 度。

可能有点抽象？来算算吧：

已知通过一电容 C 的电流为 I_x ，使用阻抗计算，电容两端的电压 $V_x = I_x Z_c = -j \frac{1}{\omega C} I_x$

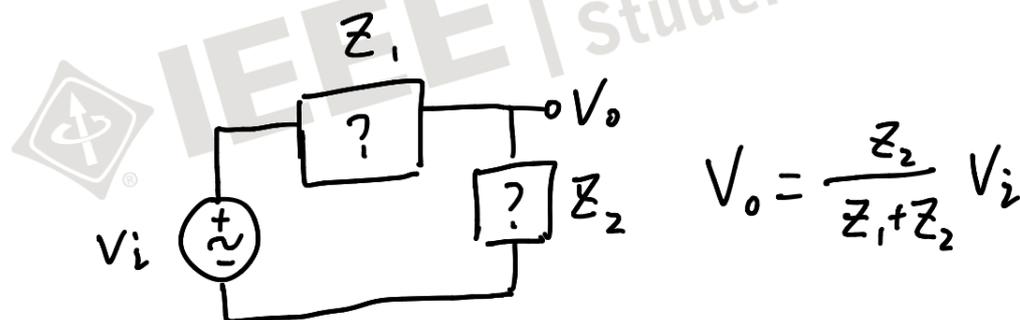


品味一下 $\sigma \setminus \setminus \setminus$

RC 电路

在实际运用和题目的电路中，电容当然不是直接移相 90° 就完事。当电路里同时有电阻和电容，也就是 RC 电路，事情就会复杂起来……

不过说难也不难，如图。只是算起来会比较麻烦（（



对于 RC 电路，其电路输入输出无非两种情况：

与输出端电阻串联：

Voltage Transfer Function

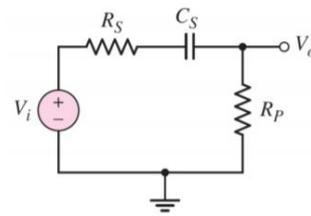


- C_S and R_P are in series
- The voltage transfer function is

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_P}{R_S + R_P + \frac{1}{sC_S}} = \frac{sR_P C_S}{1 + s(R_S + R_P)C_S} = \left(\frac{R_P}{R_S + R_P} \right) \left[\frac{s(R_S + R_P)C_S}{1 + s(R_S + R_P)C_S} \right]$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = K \left(\frac{s\tau_S}{1 + s\tau_S} \right)$$

- τ_S is a time constant



Series coupling capacitor circuit

与输出端电阻并联：

Voltage Transfer Function



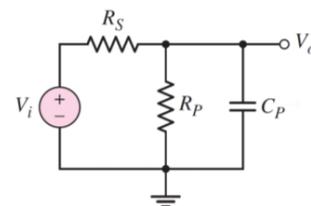
- C_P and R_P are in parallel
- Based on KCL

$$\frac{V_o - V_i}{R_S} + \frac{V_o}{R_P} + \frac{V_o}{1/sC_P} = 0$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \left(\frac{R_P}{R_S + R_P} \right) \left[\frac{1}{1 + s \left(\frac{R_S R_P}{R_S + R_P} \right) C_P} \right]$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \left(\frac{R_P}{R_S + R_P} \right) \left[\frac{1}{1 + s(R_S \parallel R_P)C_P} \right] = K \left(\frac{1}{1 + s\tau_P} \right)$$

- τ_P is a time constant



Parallel load capacitor circuit

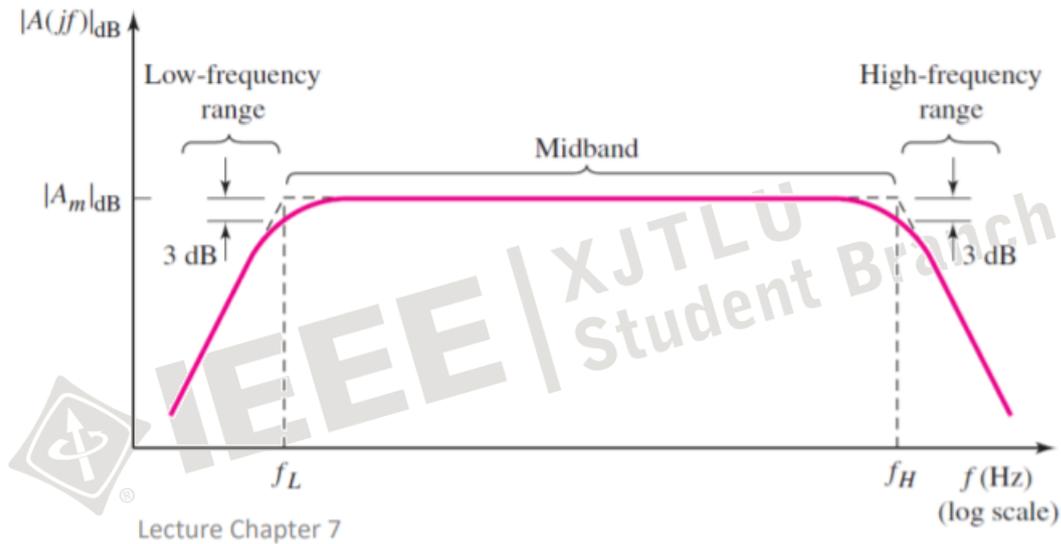
(图中 $s=j\omega$ ，纯虚数)

可以看到，输入输出电压比(电压传递函数)都是 $\frac{X}{1+s\tau}$ 这种样子的，X 要么是实数要么是纯虚数。于是，当 $s\tau_P = j$ ， $\frac{X}{1+s\tau}$ 的幅角为 $\pm 45^\circ$ 。

我们将满足这一条件的信号频率称为转折频率 (corner frequency) 或 3dB 频率。

而这 3dB 源自这一章的一个新东西——伯德图 Bode plot

分贝与伯德图



兄啊，如果没有了解过，上来就被这东西糊脸上谁顶得住啊(° ㄟ °)

$|A|$: A 就是之前算的电压传递函数, $A = \frac{V_o(S)}{V_i(S)} = \frac{X}{1+s\tau}$, 但这个复数, 包含了相位的信息。这里 $|A|$ 是单纯的信号振幅之比:

$$|A| = \left| \frac{V_o(S)}{V_i(S)} \right| = \frac{|X|}{|1+s\tau|} = \frac{|X|}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

其单位是 dB, 分贝。虽然在别处表示音量大小, 在此处只是借用了类似的等级划分表示电路对信号的增益:

$$|A| = 20 \log_{10} |A| \text{ dB}$$

那么! 书接上回, 当频率是转折频率的时候:

$$|A| = \frac{|X|}{|1+j|} = \frac{|X|}{\sqrt{2}}$$

$$20 \log_{10} \frac{|X|}{\sqrt{2}} = 20 \log_{10} |X| - 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 20 \log_{10} |X| - 3 \text{ dB}$$

这就是 3dB 的由来。

图中的 Low frequency 和 High frequency 都是 corner frequency。

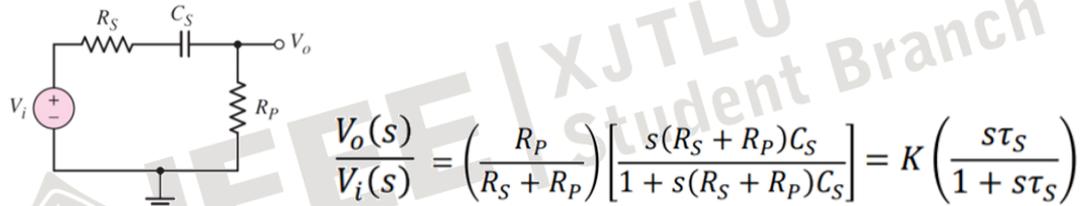
考试时候算 corner frequency, 就根据电路和阻抗算 $\frac{V_o(S)}{V_i(S)}$, 当 $s\tau = j\omega\tau = j2\pi f\tau = j$, 此时 f 就是 corner frequency 了。

Low 和 High

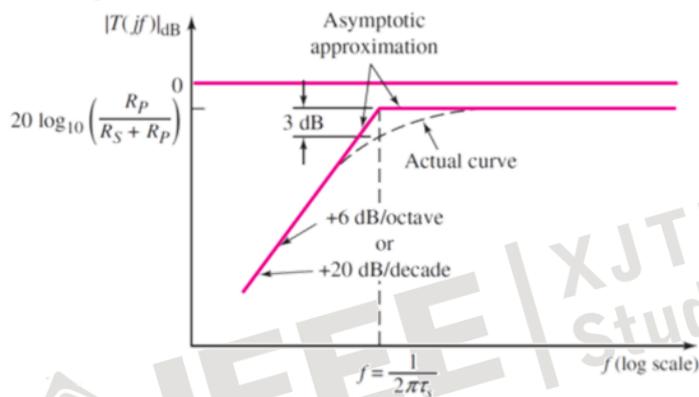
之前的 RC 电路串并联两种情况非常相似，但可以发现有所不同。

虽然同为转折频率，它们在伯德图中处于不同的位置：

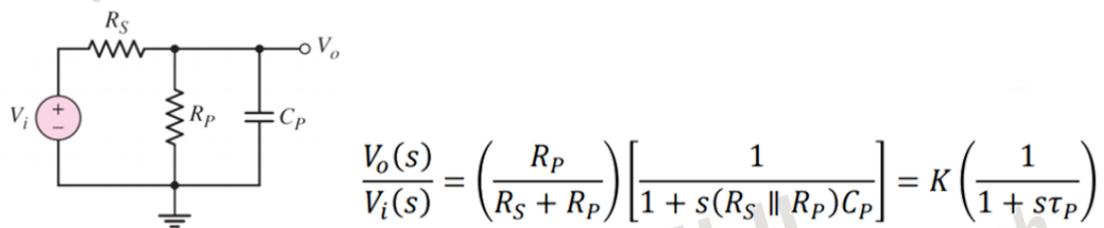
电容串联(耦合)：Low-frequency, high-pass circuit



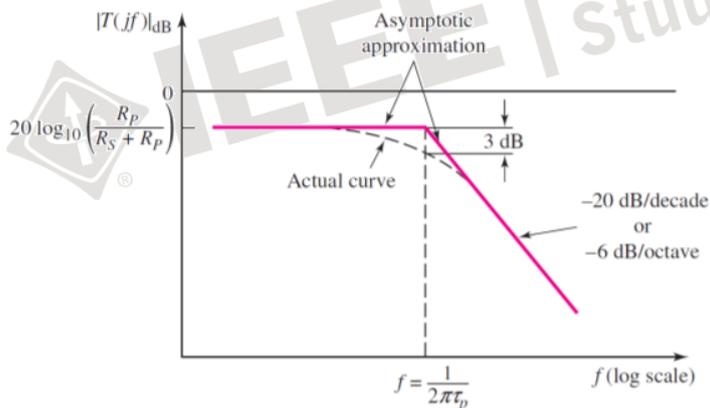
当频率太低，电容趋向于断路，输出电压下降



电容并联(负载)：High-frequency, low-pass circuit



当频率太高，电容趋向于短路，输出电压下降



注意！频率响应的公式（上面这些）并不会出现在卷子后面的公式大全里，考试时是不给的！如果对自己的电路分析能力不自信的话，还是结合 PPT 把上面两个基本模型和公式背下来为好。某种意义上，这一章就是计算难度升级的小信号电路分析，要先把电路分析，简化成 RC 电路，再计算频率响应。

比如 lecture PPT p41 的电路，拿来看看嗷……

Coupling and Load Capacitors



- The corner frequencies are

$$f_L = \frac{1}{2\pi\tau_S} \quad f_H = \frac{1}{2\pi\tau_P}$$

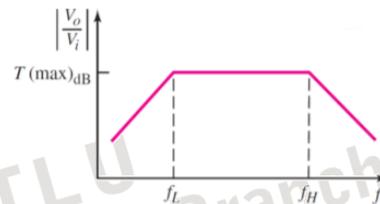
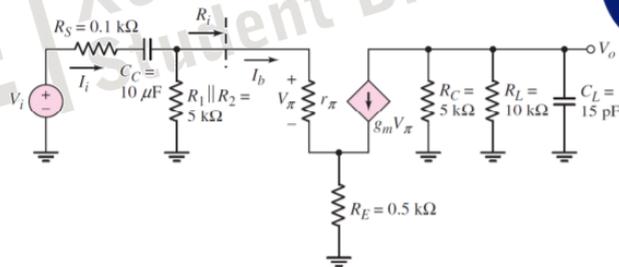
$$\tau_S = [R_S + (R_1 \parallel R_2 \parallel R_i)]C_C$$

$$R_i = r_\pi + (1 + \beta)R_E$$

$$\tau_P = (R_C \parallel R_L)C_L$$

- The magnitude of the midband gain is

$$|A_v|_{\max} = g_m r_\pi (R_C \parallel R_L) \left(\frac{R_1 \parallel R_2}{(R_1 \parallel R_2) + R_i} \right) \left(\frac{1}{R_S + (R_1 \parallel R_2 \parallel R_i)} \right)$$



Handwritten analysis of the circuit:

Input side analysis:

$$R_i = \frac{V_x}{I_b} = \frac{I_b r_\pi + (1 + \beta) I_b R_E}{I_b} = r_\pi + (1 + \beta) R_E$$

$$\tau_S = [R_S + (R_1 \parallel R_2 \parallel R_i)] C_C$$

Output side analysis:

$$R_x = R_C \parallel R_L$$

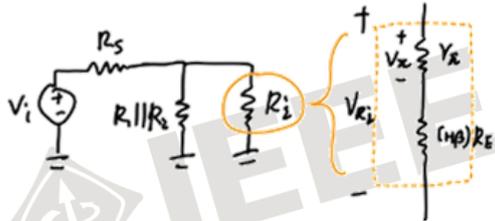
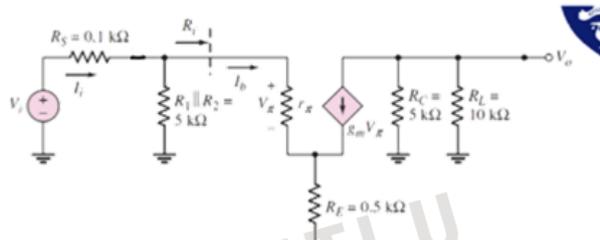
$$\tau_P = (R_C \parallel R_L) C_L$$

Midband gain:

$$|A_v|_{\max} = g_m r_\pi (R_C \parallel R_L) \left(\frac{R_1 \parallel R_2}{(R_1 \parallel R_2) + R_i} \right) \left(\frac{1}{R_S + (R_1 \parallel R_2 \parallel R_i)} \right)$$

当 $|A_v| = |A_{v\max}$, C_c 视为短路, C_L 视为断路 (中频),

电路相当于:



$$V_{R_i} = V_i \frac{R_1 \parallel R_2 \parallel R_i}{R_S + R_1 \parallel R_2 \parallel R_i} = \frac{V_i}{R_S + R_1 \parallel R_2 \parallel R_i} \cdot \frac{(R_1 \parallel R_2) R_i}{(R_1 \parallel R_2) + R_i}$$

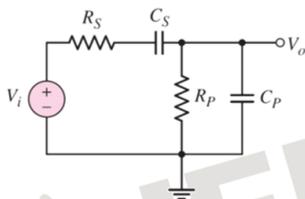
$$V_{\pi} = V_{R_i} \cdot \frac{Y_{\pi}}{R_i} = \frac{V_i}{R_S + R_1 \parallel R_2 \parallel R_i} \cdot \frac{(R_1 \parallel R_2) R_i}{(R_1 \parallel R_2) + R_i} \cdot \frac{Y_{\pi}}{R_i} = \frac{V_i}{R_S + R_1 \parallel R_2 \parallel R_i} \cdot \frac{(R_1 \parallel R_2)}{(R_1 \parallel R_2) + R_i} \cdot Y_{\pi}$$

$$V_o = g_m V_{\pi} \cdot (R_C \parallel R_L)$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{g_m V_{\pi}}{V_i} (R_C \parallel R_L) = \frac{g_m}{V_i} \frac{V_i}{R_S + R_1 \parallel R_2 \parallel R_i} \cdot \frac{(R_1 \parallel R_2)}{(R_1 \parallel R_2) + R_i} \cdot Y_{\pi} \cdot (R_C \parallel R_L) = |A_{v\max}|$$

$$|A_{v\max}| = g_m r_{\pi} (R_C \parallel R_L) \left(\frac{R_1 \parallel R_2}{(R_1 \parallel R_2) + R_i} \right) \left(\frac{1}{R_S + (R_1 \parallel R_2 \parallel R_i)} \right)$$

虽然在有些地方, 还会有两种模型混在一起的情况:



$$V_i \left(\frac{1}{R_S + \frac{1}{sC_S}} \right) = V_o \left(\frac{1}{R_S + \frac{1}{sC_S}} + \frac{1}{R_P} + \frac{1}{sC_P} \right)$$

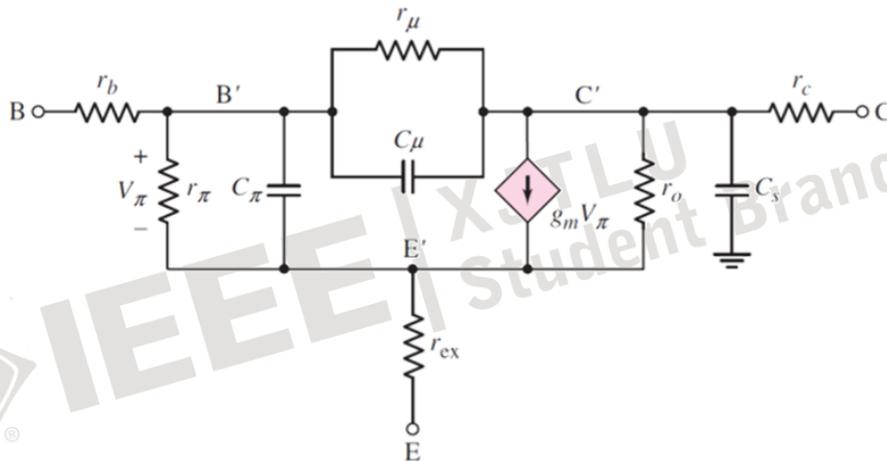
上图和右式直接考虑计算是非常**的复杂的, 很麻烦。

好在, 一般来说, 这俩电容会相差好几个数量级, 所以基本上互不影响。在求解时可以退化之前的两种模型再计算。

(这门课各种近似也不是一天两天了(´ω`)我想带伙应该也见怪不怪了)

三极管频率响应-密勒效应

之后还有考虑三极管电容结构的进阶部分，但没在大题里见过，应该只是了解就好。



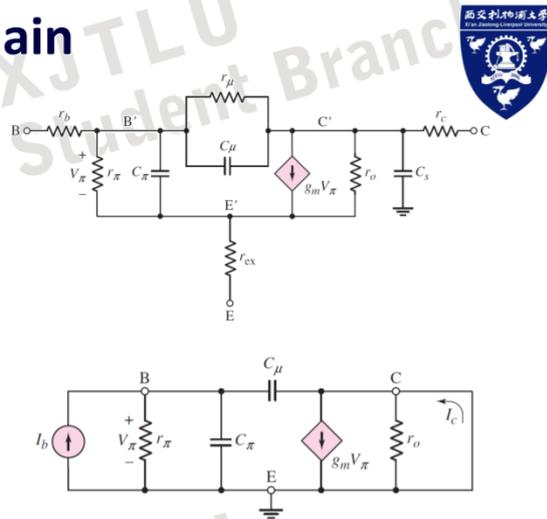
[混合π等效电路升级版]

(∪) ° 这就离谱，学三极管都没学这个啊……

Short-Circuit Current Gain

- Simplified hybrid- π equivalent circuit
 - $r_b, r_c, r_{ex}, r_\mu,$ and C_s are neglected
 - The transistor must still be biased in the **forward-active region**
- Writing KCL equation

$$I_b = \frac{V_\pi}{r_\pi} + \frac{V_\pi}{\frac{1}{j\omega C_\pi}} + \frac{V_\pi}{\frac{1}{j\omega C_\mu}}$$



于是交流小信号等效电路也变了

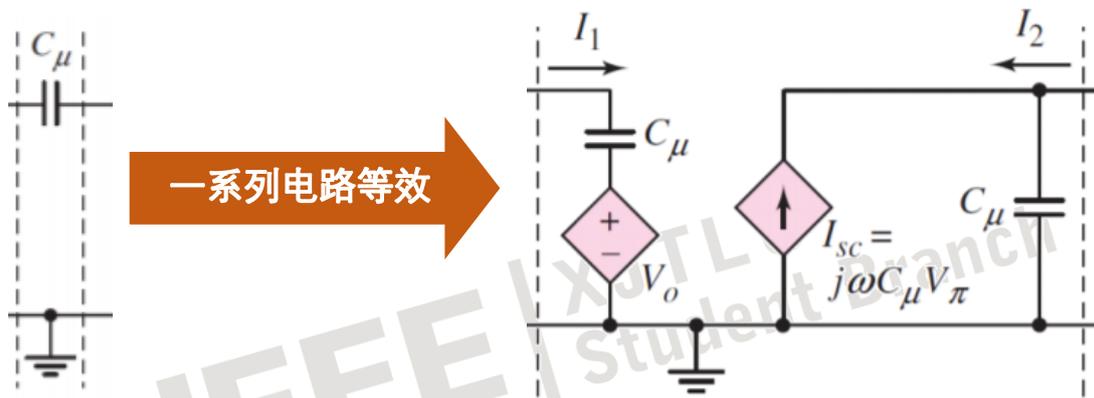
而且可以见得，依然有许多量被忽略了，最后其实我们的三极管就是加上了俩电容。由于有了电容，现在三极管自己都会对信号响应起来了！

对于这个模型分析的重点有两点：

1. 在 B 点使用 KCL (也只能这么分析了)
2. 有电流从 C_μ 偷跑到另一边了 (电路右侧电流 $< g_m V_\pi$)

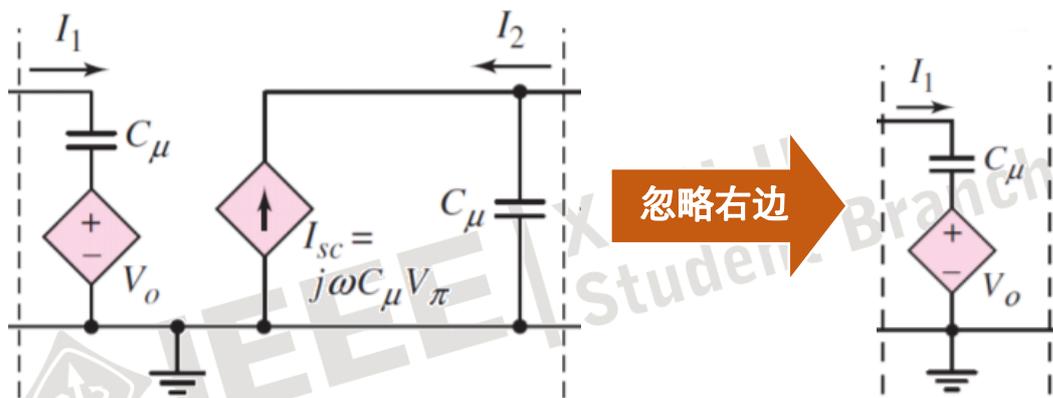
然而事实上，这样分析依然会是比较困难的。而且 C_μ 这个电容还会有神秘的倍增效应 (密勒效应)，所以模型还要变。

这一块很难，好在与大题无关，懂就行，笔者尝试解释一下(≈复述)：



长得复杂了不少，但是分析计算简单了。

喜报：一般来说右边结构也可以忽略掉，结构大简化！



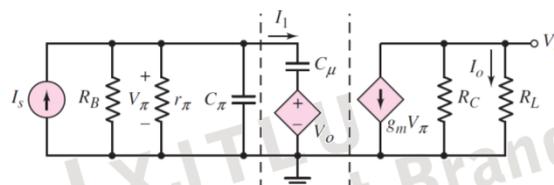
但工程师们尤不满足！这个受控电压源好难看！去掉！

Miller Effect and Miller Capacitance



- The output voltage is

$$V_o = -g_m V_\pi (R_C \parallel R_L)$$

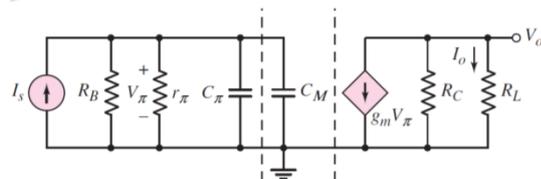


$$I_1 = j\omega C_\mu (V_\pi - V_o) = j\omega C_\mu [1 + g_m (R_C \parallel R_L)] V_\pi = j\omega C_M V_\pi$$

- C_M is the **Miller capacitance**

$$C_M = C_\mu [1 + g_m (R_C \parallel R_L)]$$

- The multiplication effect of C_μ is the **Miller effect**



于是我们最终如此等效，这个 C_M 就叫密勒电容。而三极管只是多了一对并联的电容，可喜可贺，可喜可贺(°∀。)

好，那么，我们的 week11-12 的笔记就到此为止了，希望能在最后的复习时间里给大家一些帮助，感谢各位观看。

接下来是 week14 了，不过和大题无关且期末时间紧迫不一定会写哦？(´_>`)毕竟我们也只是辅助资料，自己复习才是王道啦 σ∨)

相信本文档会多有错漏与不足，也请各位看官 dalao 与我们交流提问纠错指正。

……交流渠道……



西浦科协唯一指定关注二维码

你可以把文档相关的问题发给公众号，我们会及时查看回复。

[本章无 source]

2021.1.9 醜坦